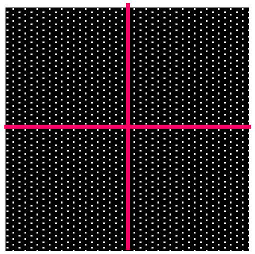
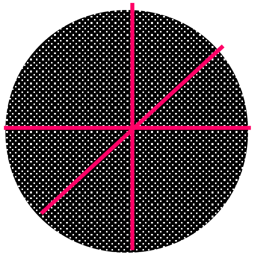
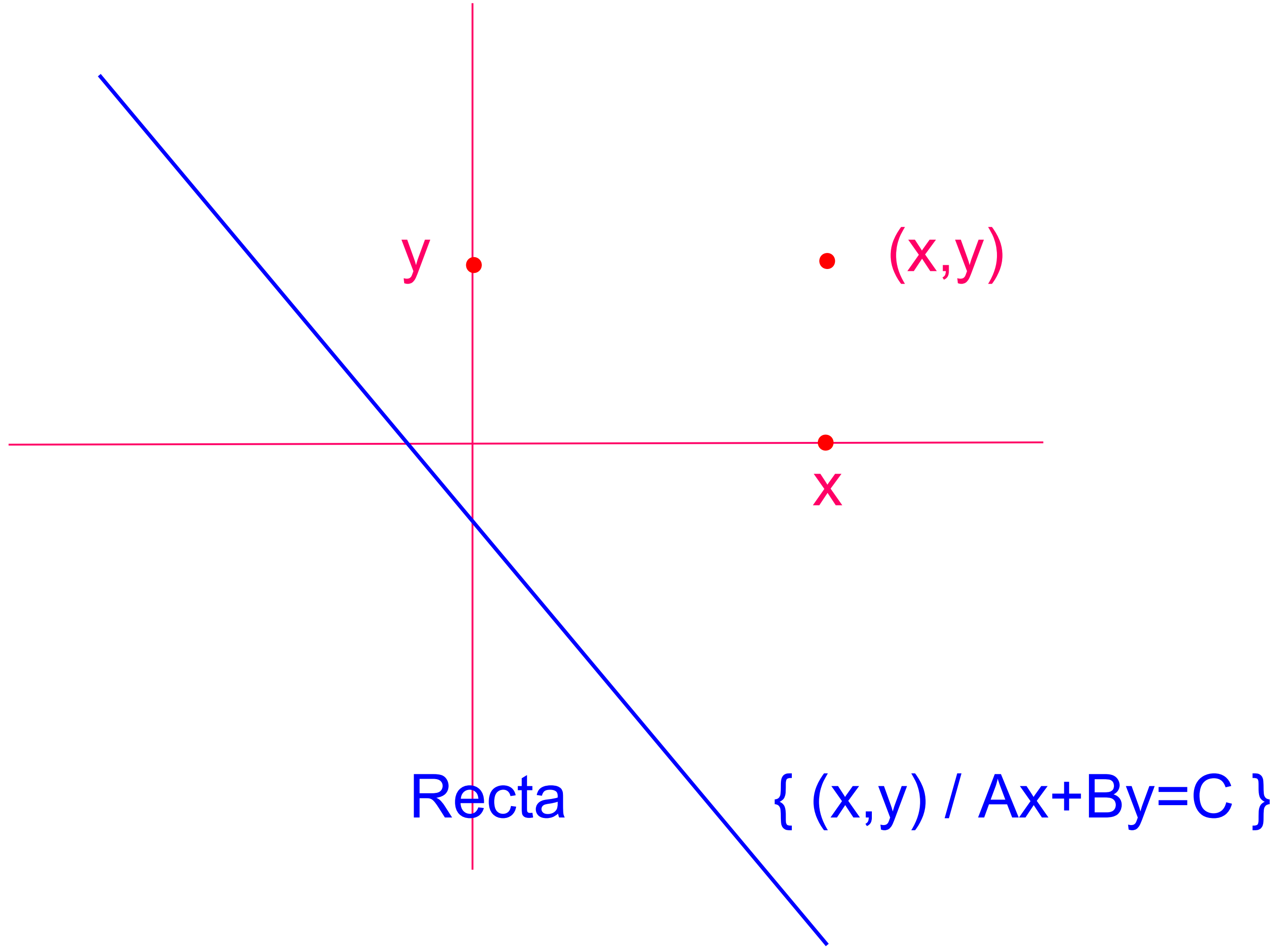
3. Hay álgebra en la geometría
y geometría en el álgebra

Geometría		*Modelo algebráico*
Recta Euclidiana		R
Plano Euclidiano		R^2
Espacio Euclidiano		R^3

Coordenadas y ecuaciones



¿Por qué los reales?

¿Como sabemos que representan fielmente a la geometría euclidiana?

Para empezar, tendríamos que mostrar que el modelo cumple los axiomas…

Dados dos puntos hay una línea que los contiene

Dados (a,b) y (c,d) hay una ecuación $Ax+By=C$ satisfecha por ambos

Dos líneas distintas se intersectan en a lo mas un punto:

Dos ecuaciones $Ax+By=C$ y $Dx+Ey=F$ tienen a lo mas una solución común

Por cada punto pasa una paralela a cada línea…

¿Por qué los reales?

¿Como sabemos que representan fielmente a la geometría euclidiana?

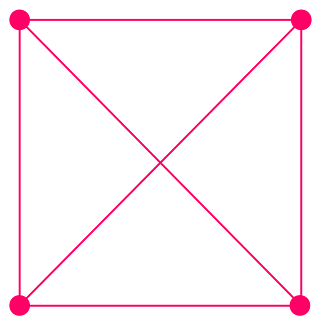
Y si en lugar de los reales hubieramos usado a los racionales o a lo complejos?

Tambien habrían cumplido los axiomas de incidencia … (pero con los irracionales no)

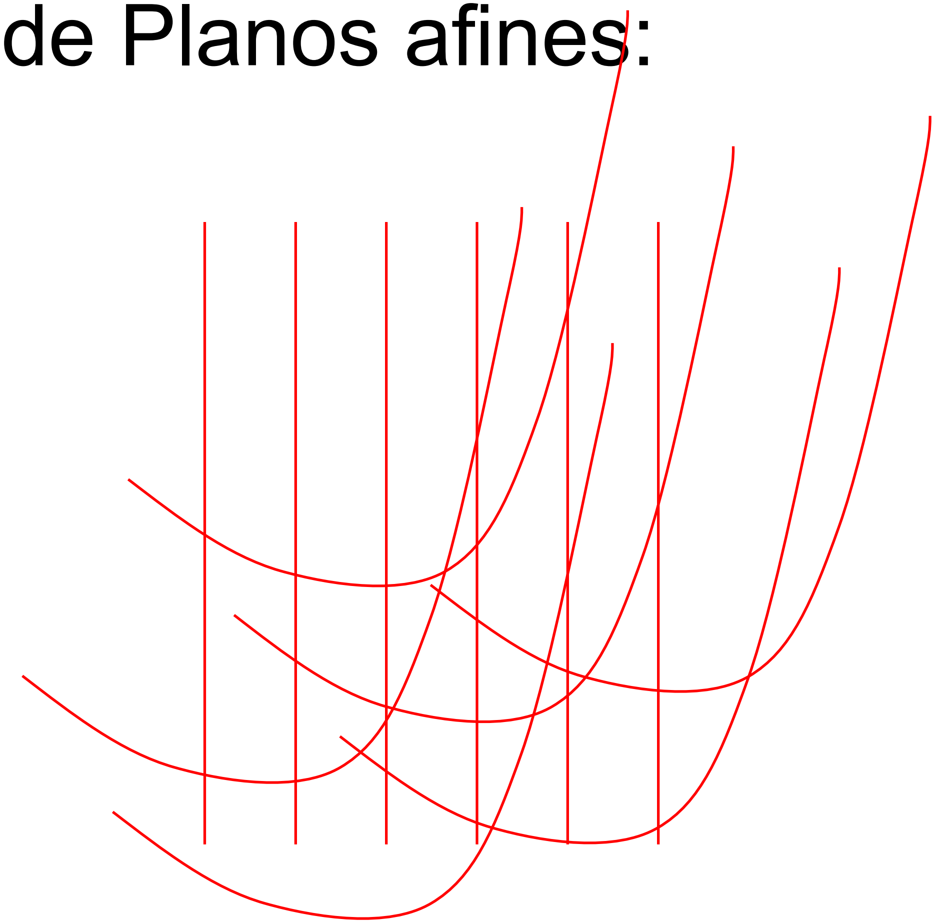
Plano afín

- Por dos puntos pasa una y sólo una línea
- Por cada punto pasa una y sólo una paralela a cada línea
- Hay al menos 2 líneas y cada línea tiene al menos 2 puntos.

Otros ejemplos de Planos afines:



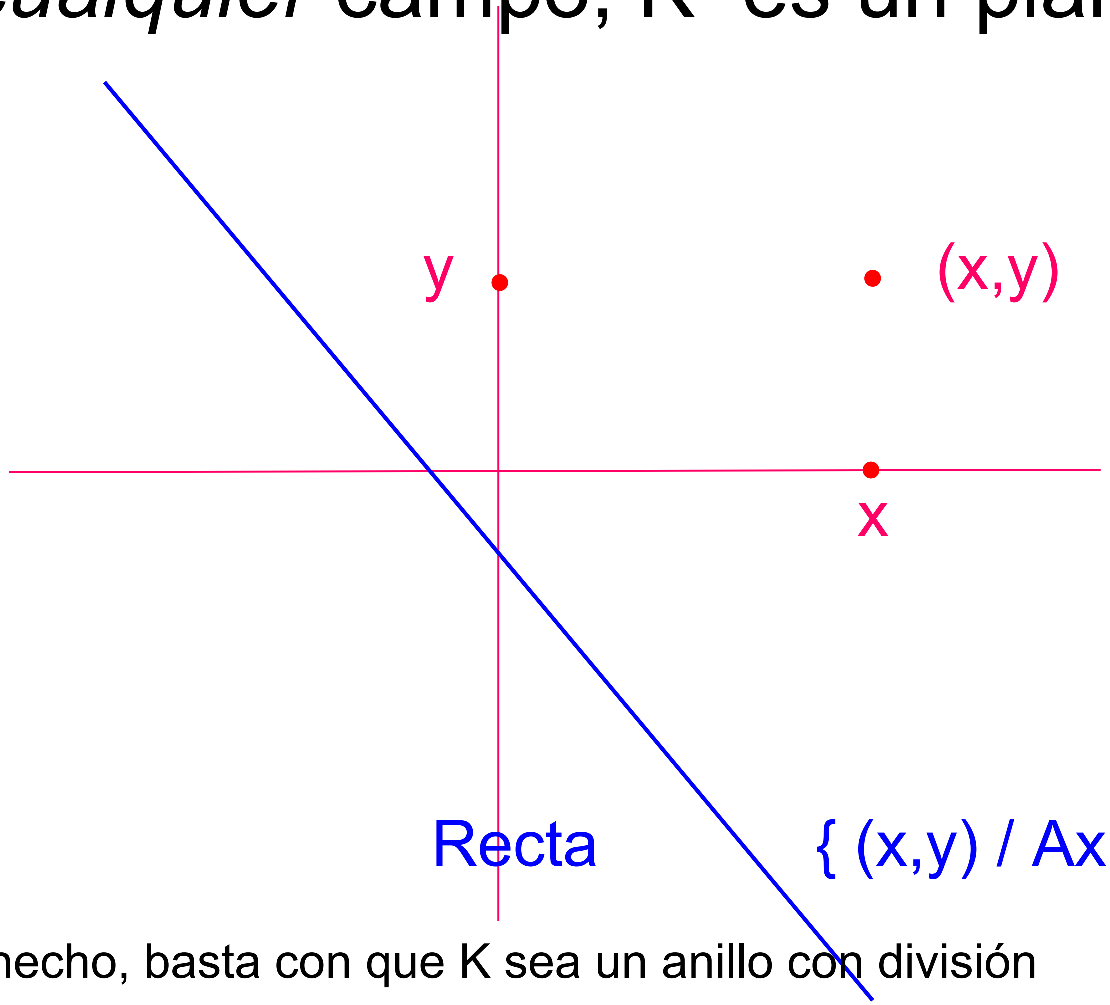
4 puntos y 6 lineas



El plano con líneas definidas
de otro modo

Mas ejemplos:

Si K es *cualquier* campo, K^2 es un plano afín

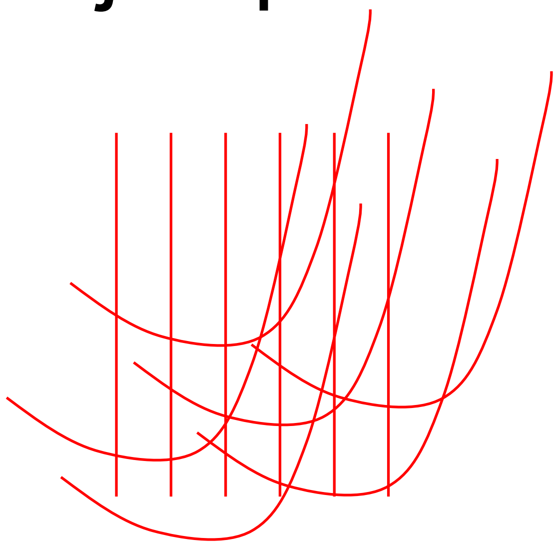


De hecho, basta con que K sea un anillo con división

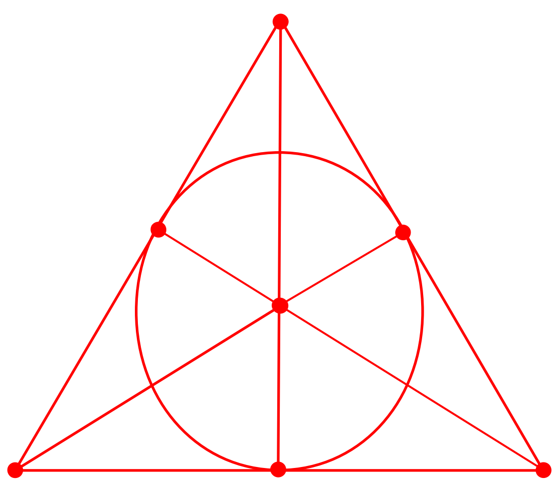
Plano proyectivo

- Cada par de puntos inciden en una línea.
- Cada par de líneas inciden en un punto.
- Hay al menos 3 líneas y cada línea tiene al menos 3 puntos.

Ejemplos de Planos proyectivos:



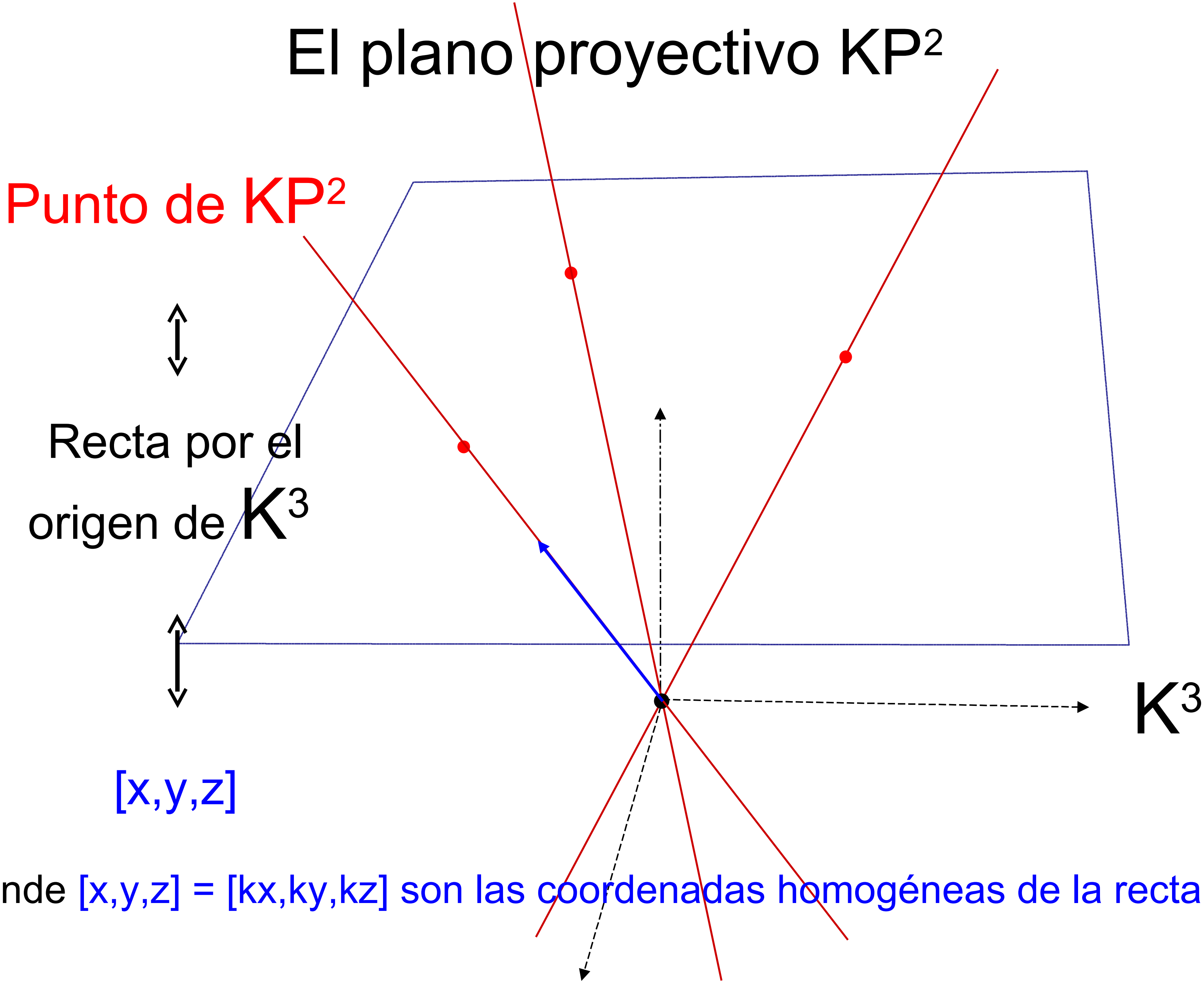
Cada plano afín se puede completar a un plano proyectivo



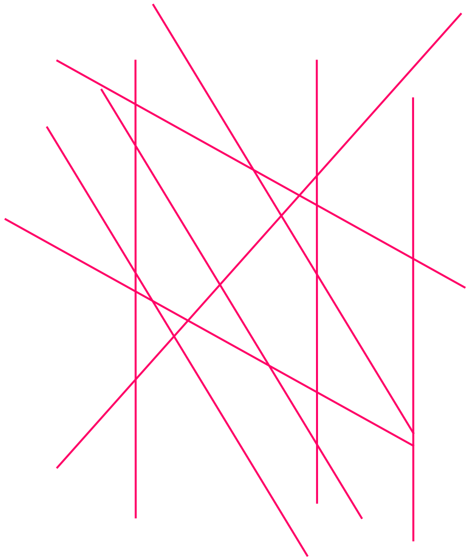
Cada plano proyectivo contiene planos afines

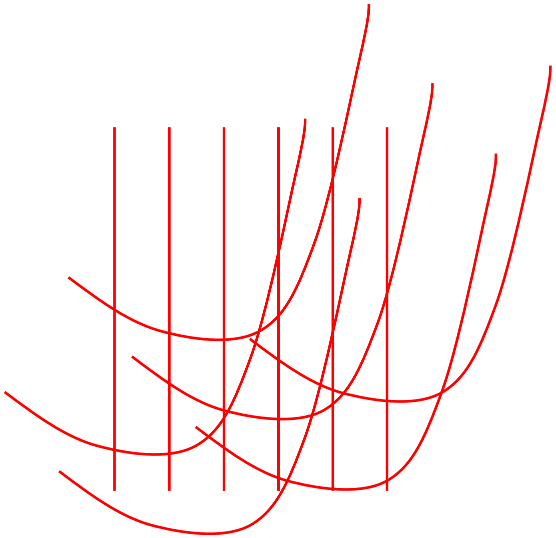
(el complemento de cada recta proyectiva es un plano afín)

El plano proyectivo KP^2



Donde [x,y,z] = [kx,ky,kz] son las coordenadas homogéneas de la recta





Dos planos afines o proyectivos son *isomorfos* si existe una función biyectiva entre sus puntos que manda líneas en líneas líneas.

¿Qué otras propiedades del plano afín (o proyectivo) real compartirán los planos afines (o proyectivos) abstractos?

Por ejemplo, ¿Se valdrá el teorema de Desargues? ¿Y el de Pappus?

Teorema

- Un plano proyectivo es isomorfo a un KP^2 para algún anillo con división K $\leftrightarrow$ satisface el Teorema de Desargues

- El plano proyectivo satisface el teorema de Pappus si y solo si K es un campo.

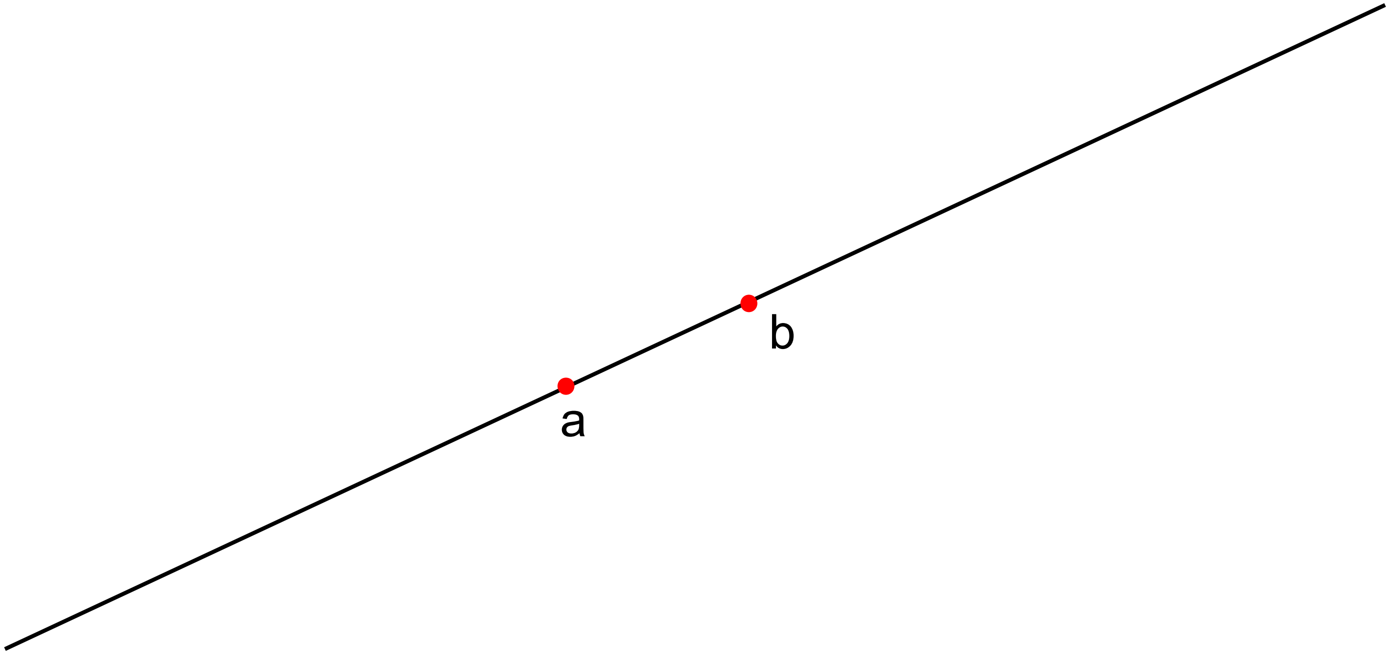
Idea de la demostración:

considerar un plano afín contenido en el plano proyectivo.

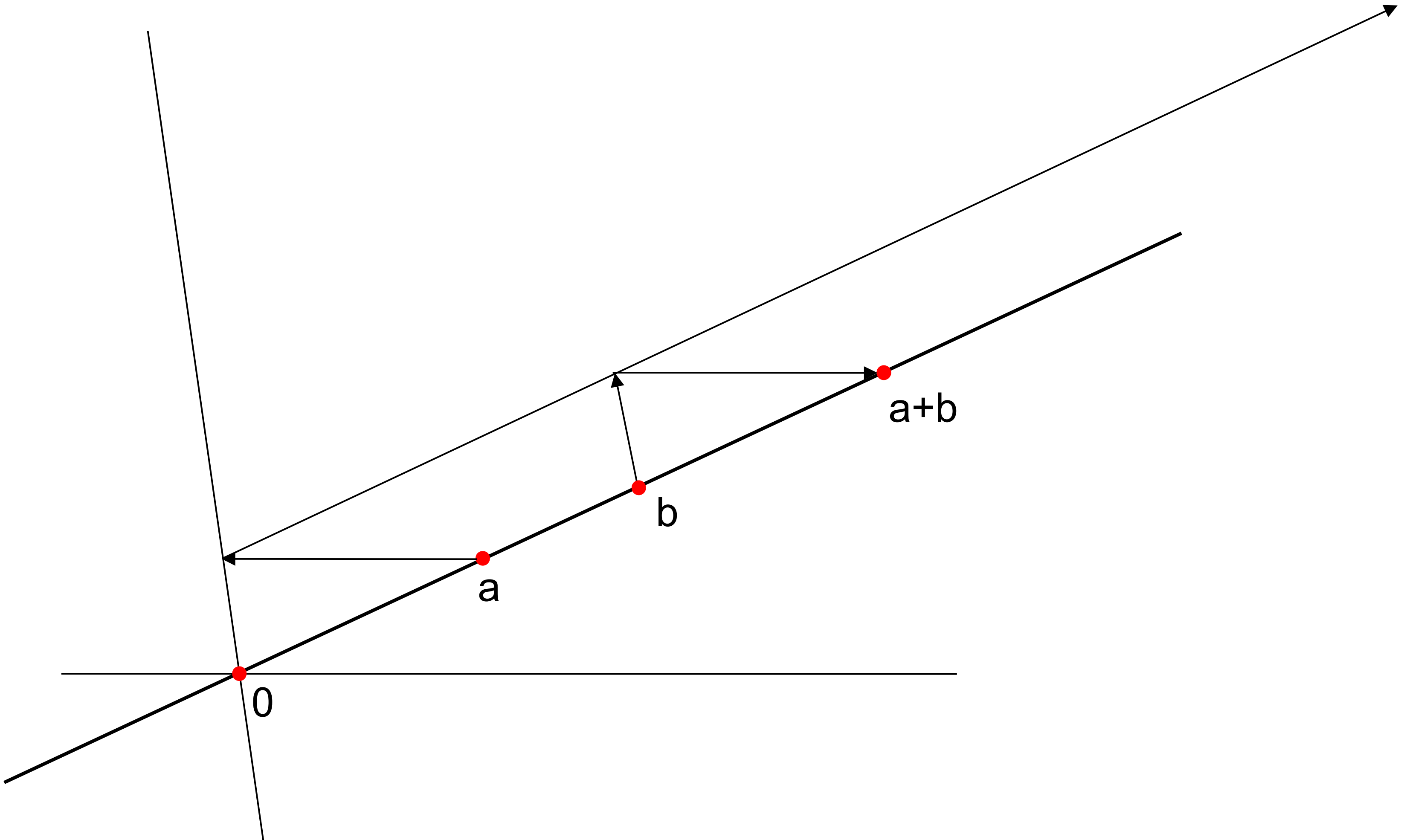
- Para ver que en K^2 vale el Teorema de Desargues hay que dar una demostración algebraica de este teorema.

- Para ver que un plano afín desarguesiano es isomorfo a algún K^2, hay que ver como darle estructura de anillo a las líneas, usando la geometría afín.

¿Como puedo combinar estos dos puntos para obtener otro punto en la línea?



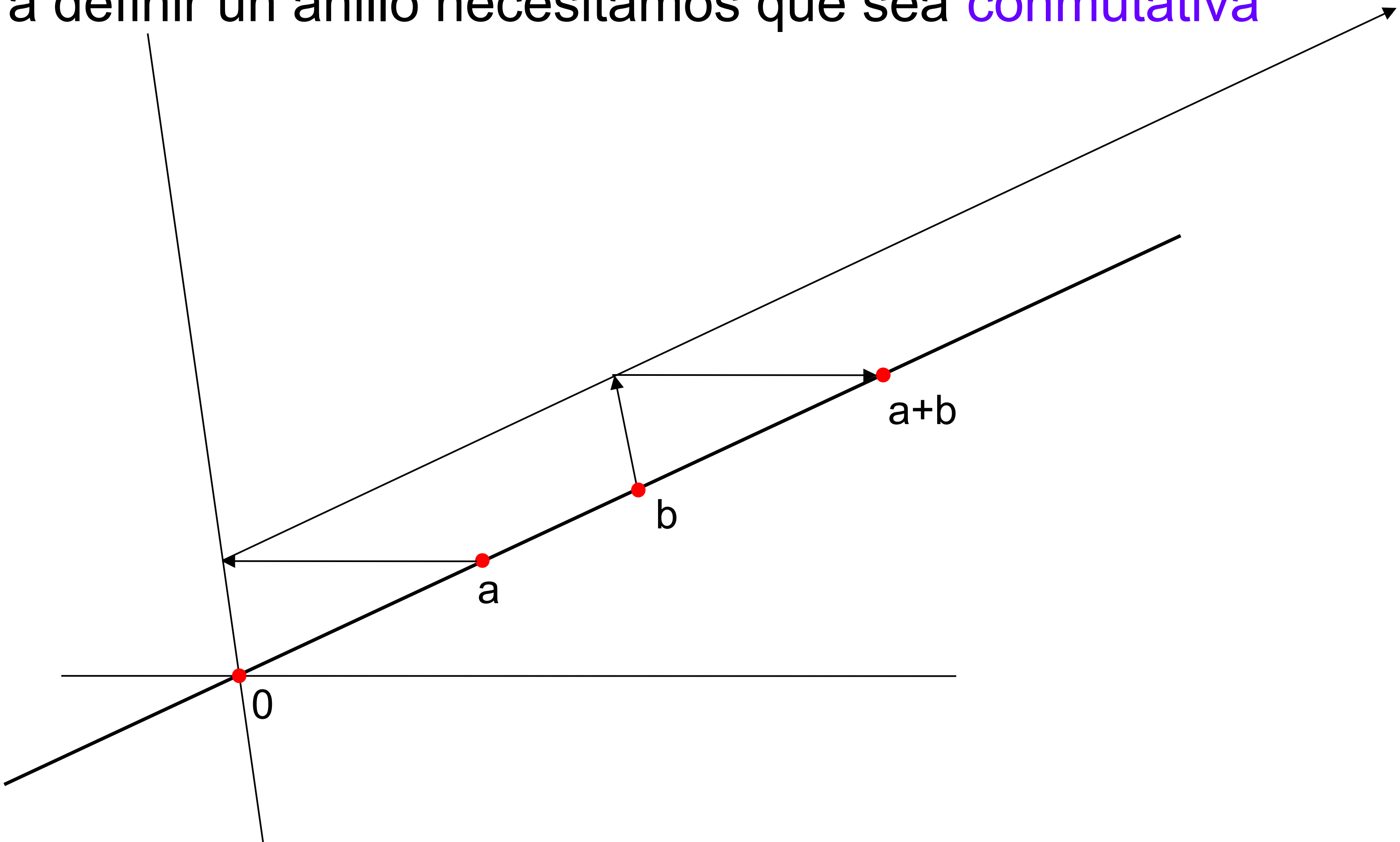
“Suma”



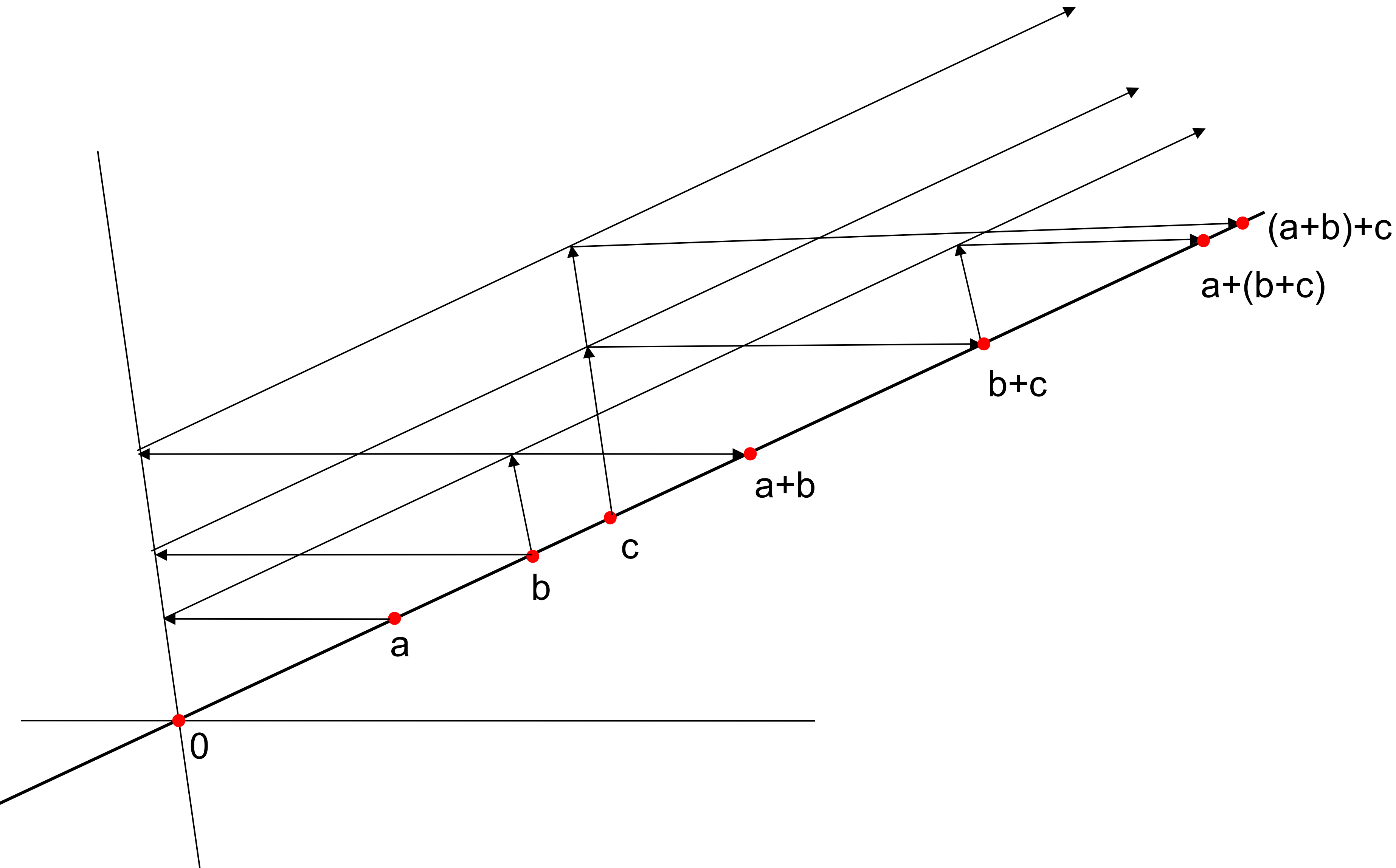
Esta “suma” tiene neutro e inversos.

Para definir un grupo, necesitamos que sea asociativa

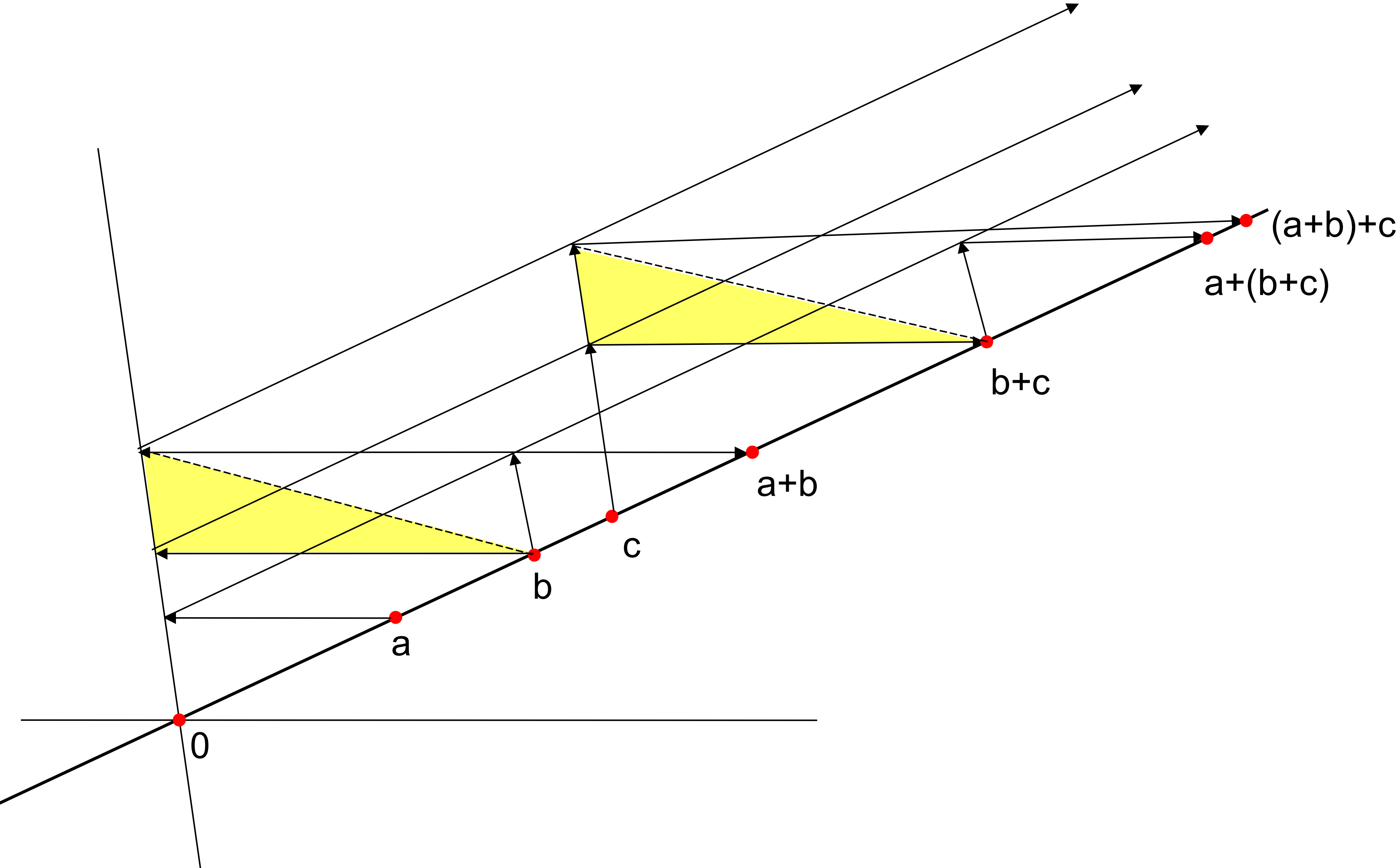
Para definir un anillo necesitamos que sea conmutativa



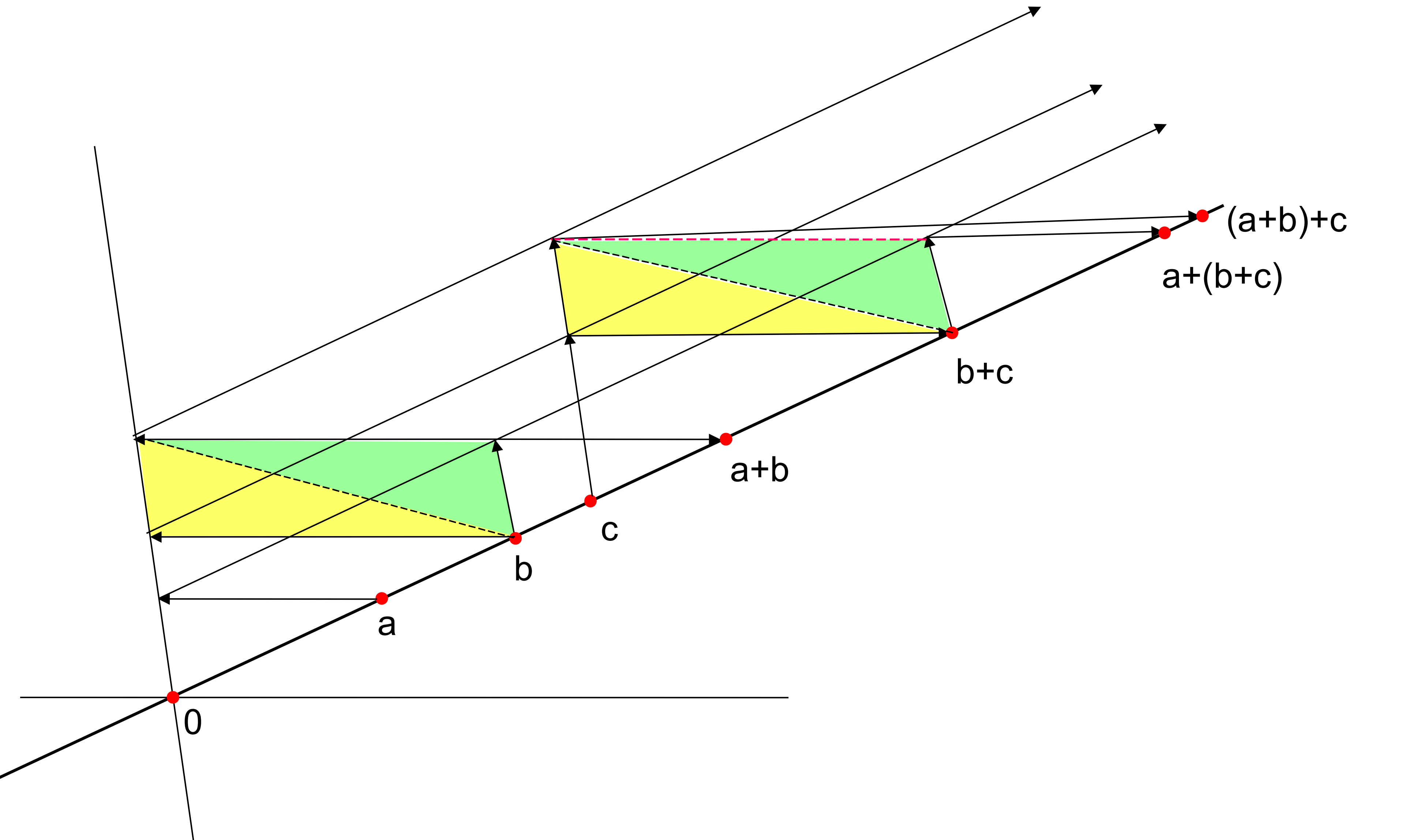
Si el plano es desarguesiano, la suma es asociativa:



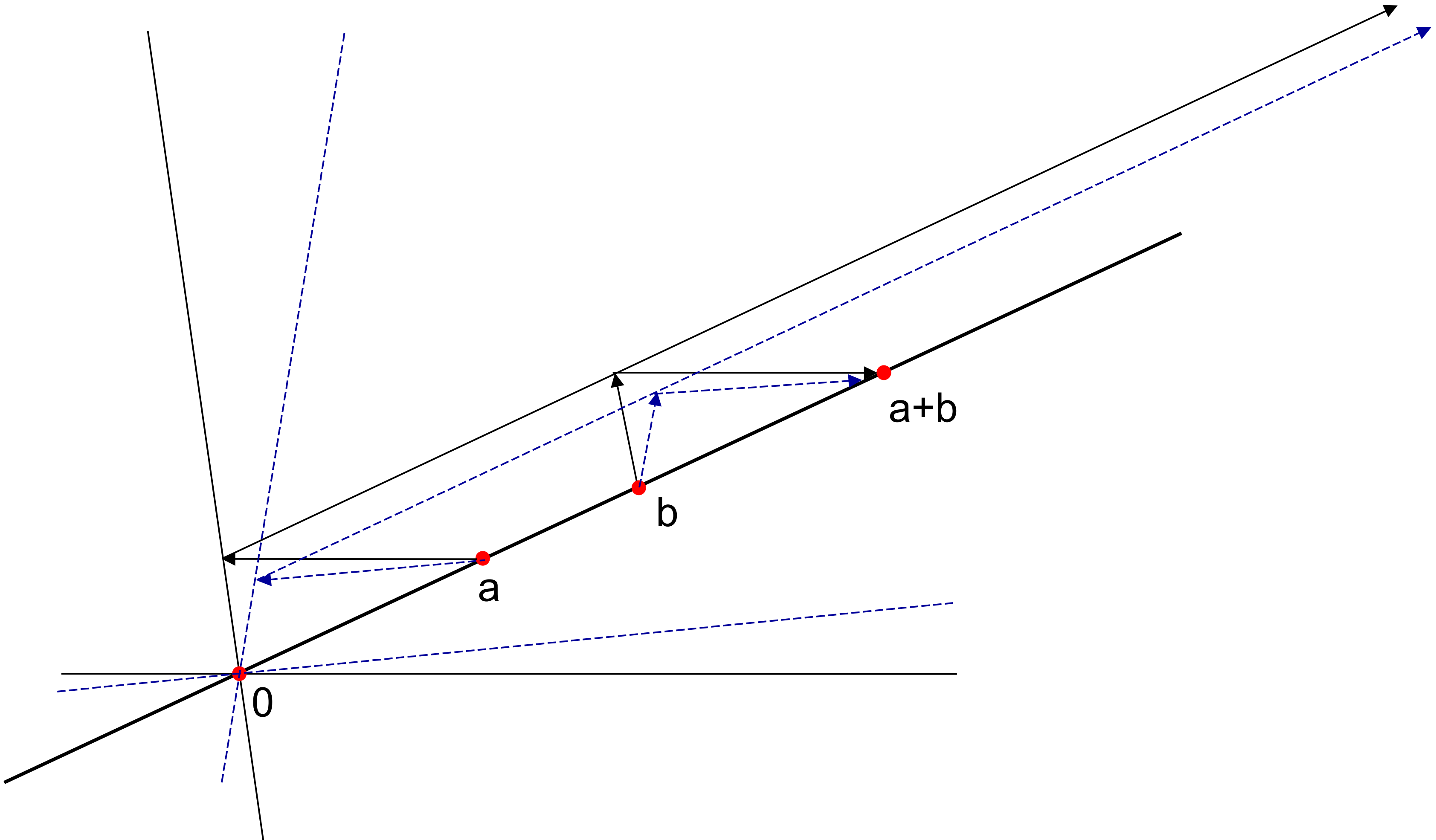
Si el plano es desarguesiano, la suma es asociativa:



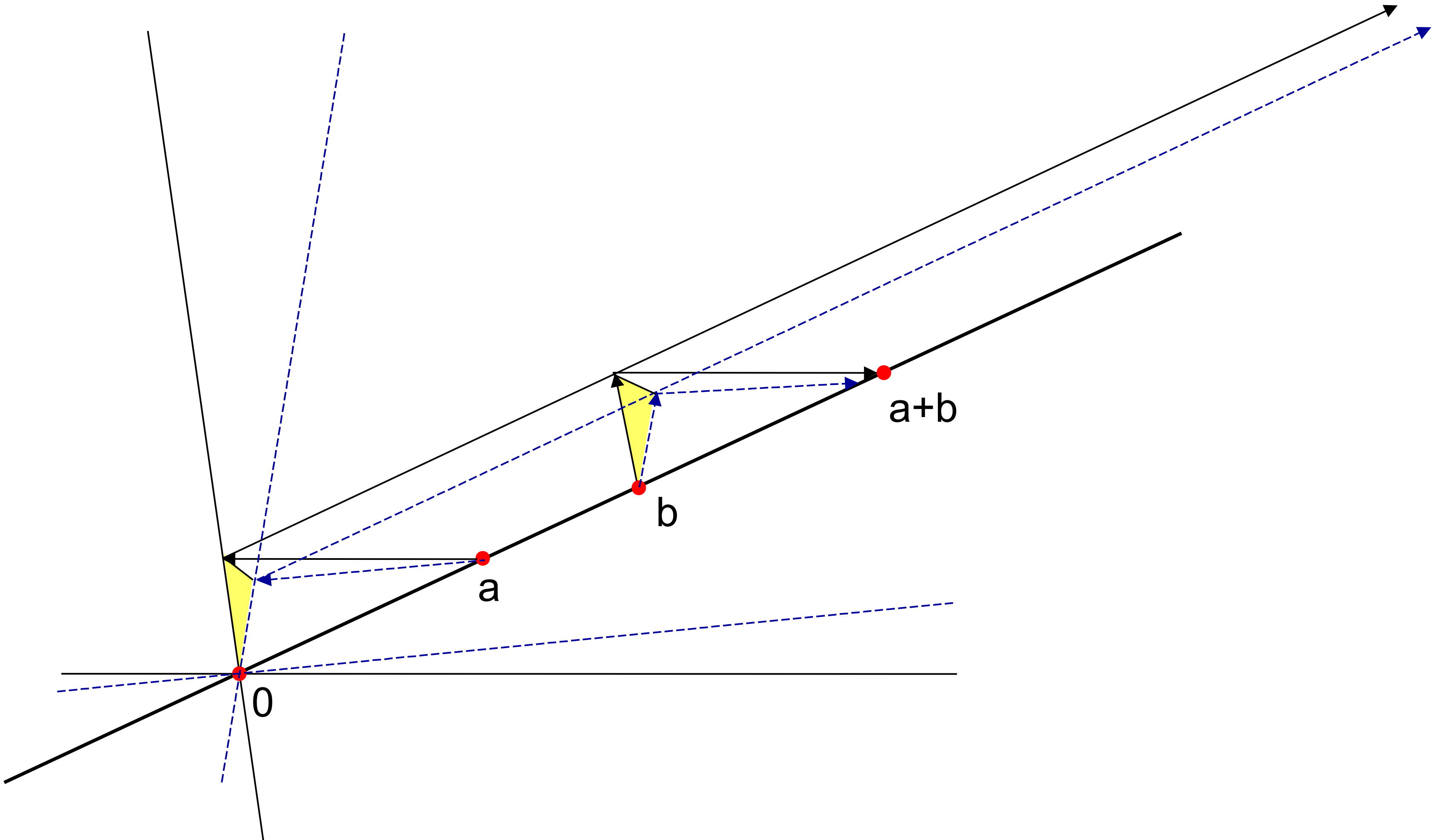
Si el plano es desarguesiano, la suma es asociativa:



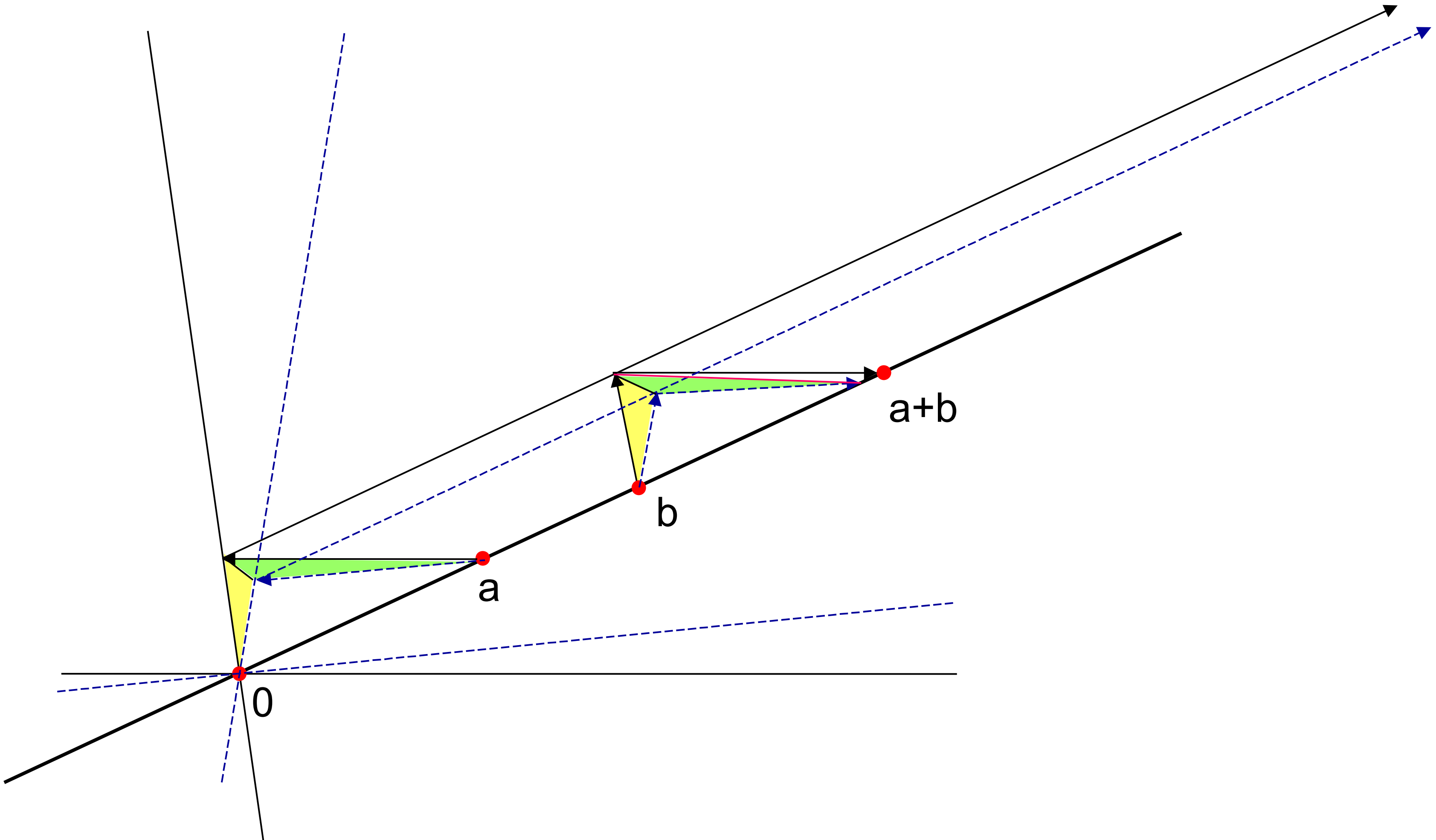
Otro detallito: la suma depende de las líneas elegidas



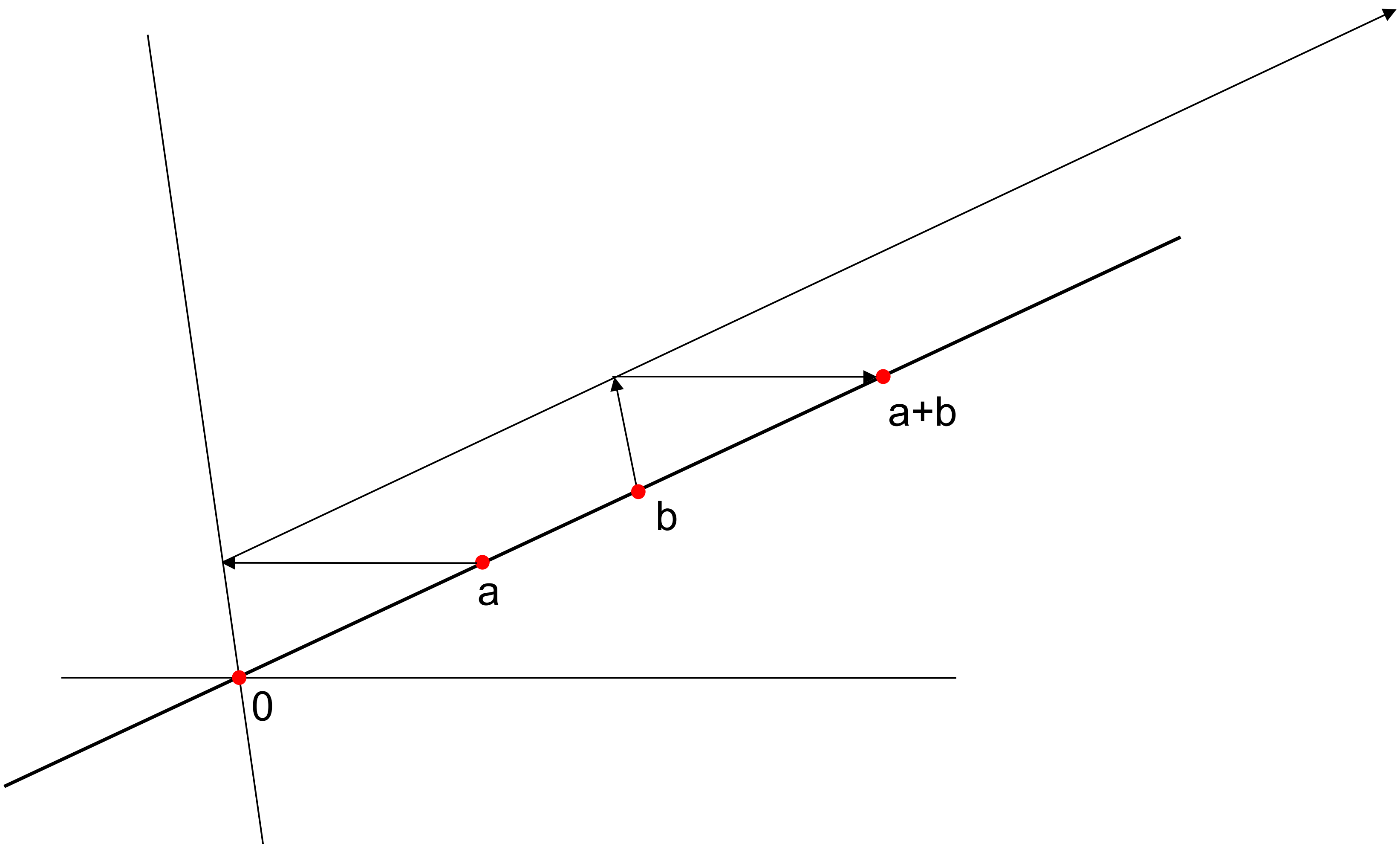
Otro detallito: la suma depende de las líneas elegidas



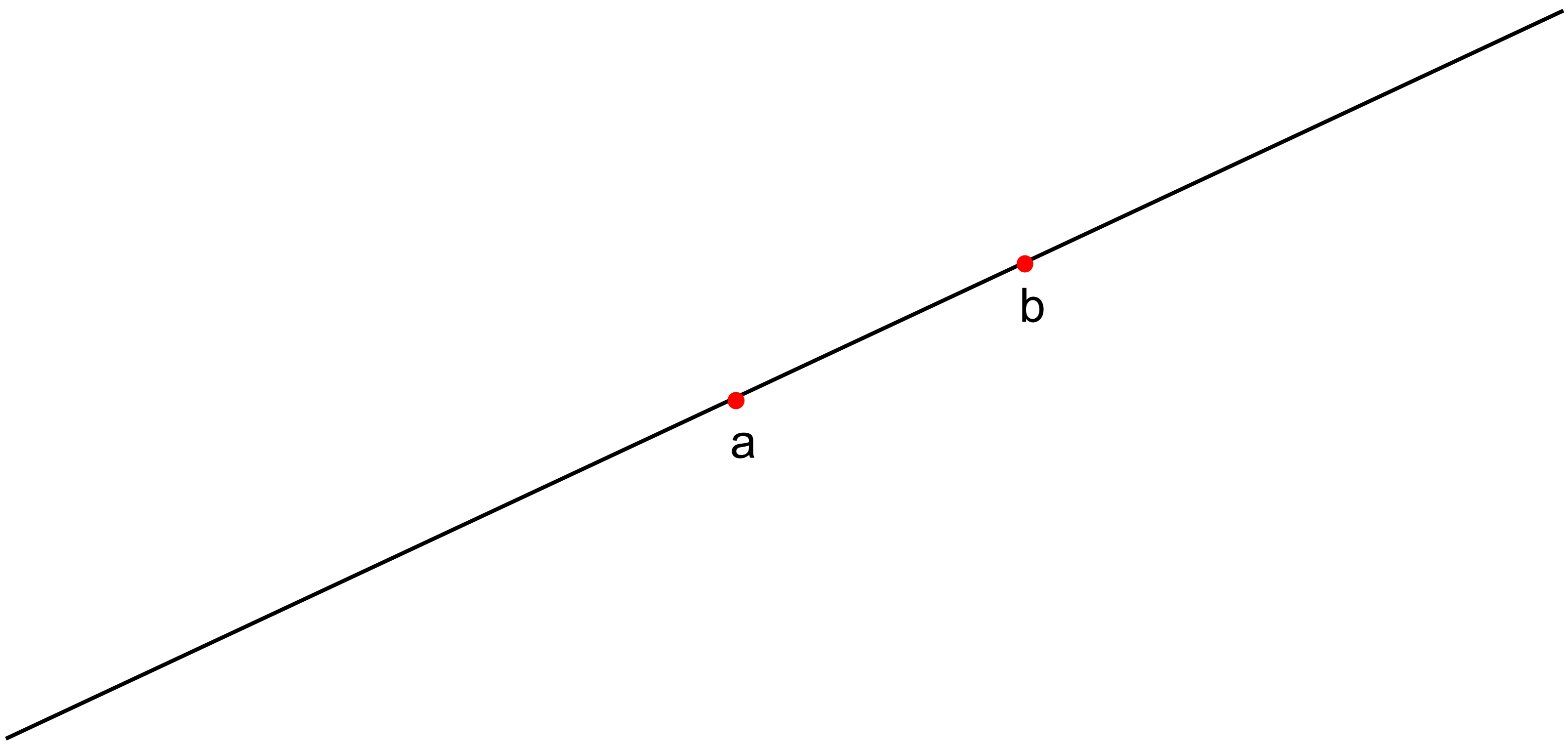
Otro detallito: la suma depende de las líneas elegidas



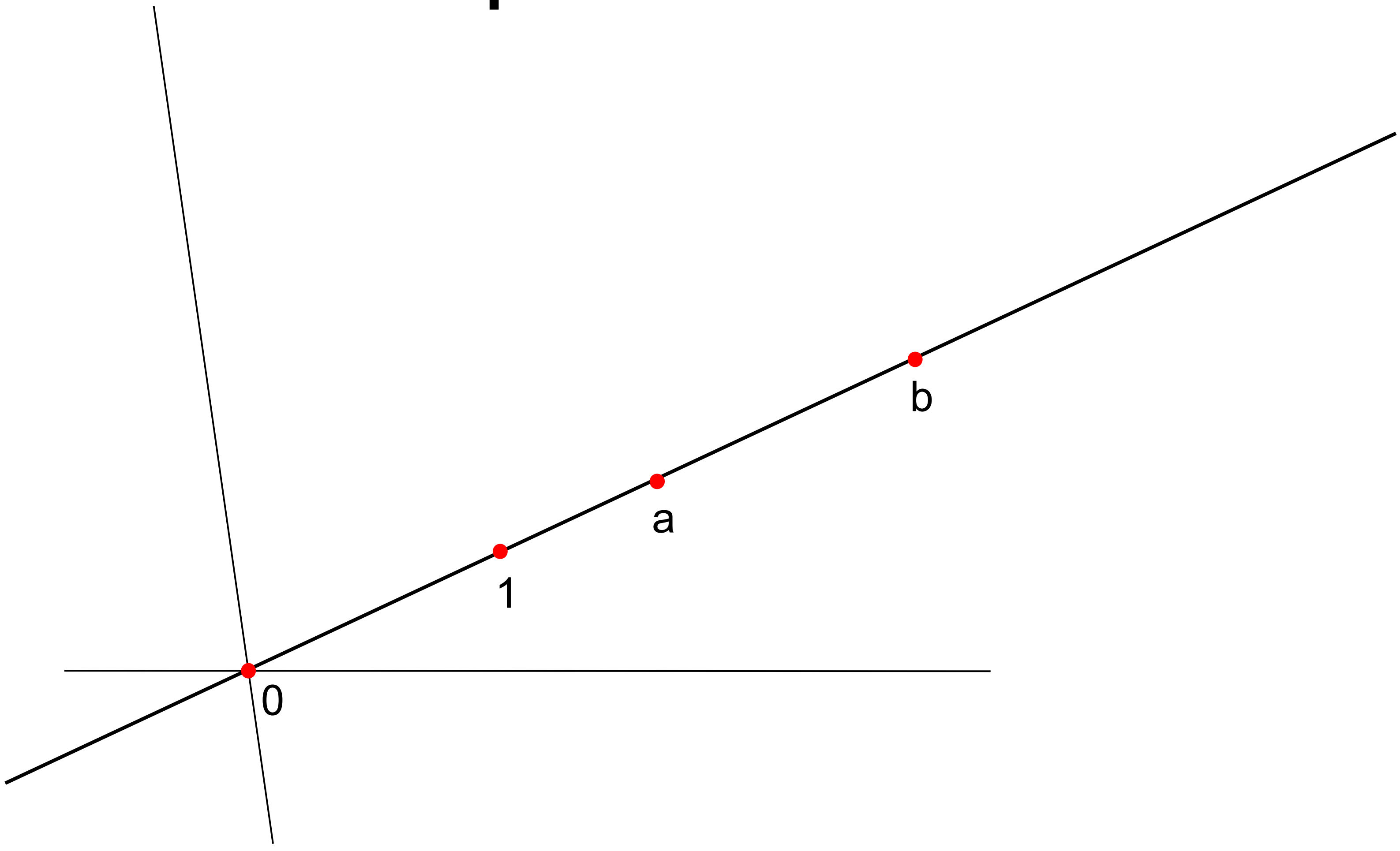
Si vale el teorema de Desargues, esta suma es asociativa y conmutativa y no depende de las líneas



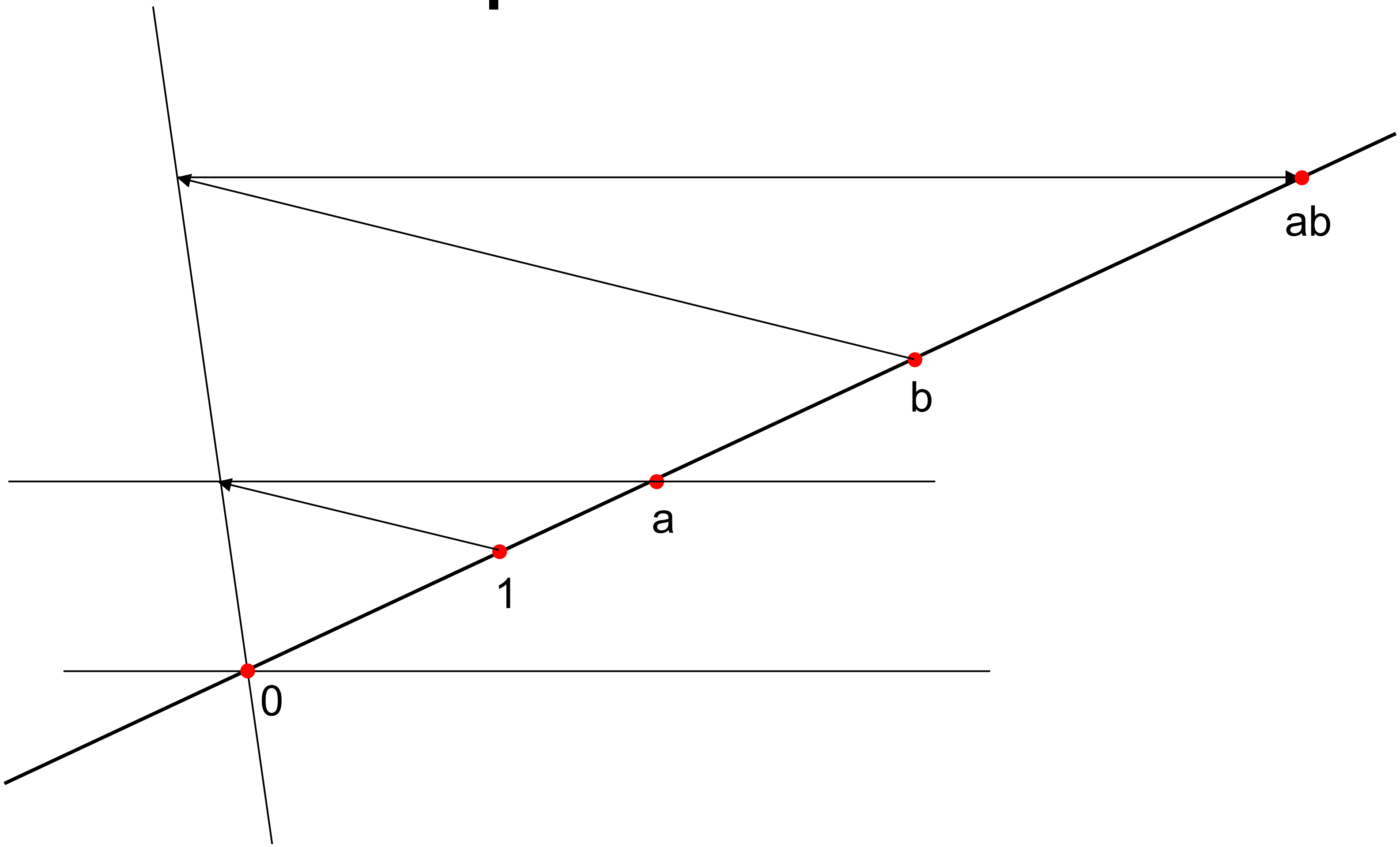
¿producto?



producto

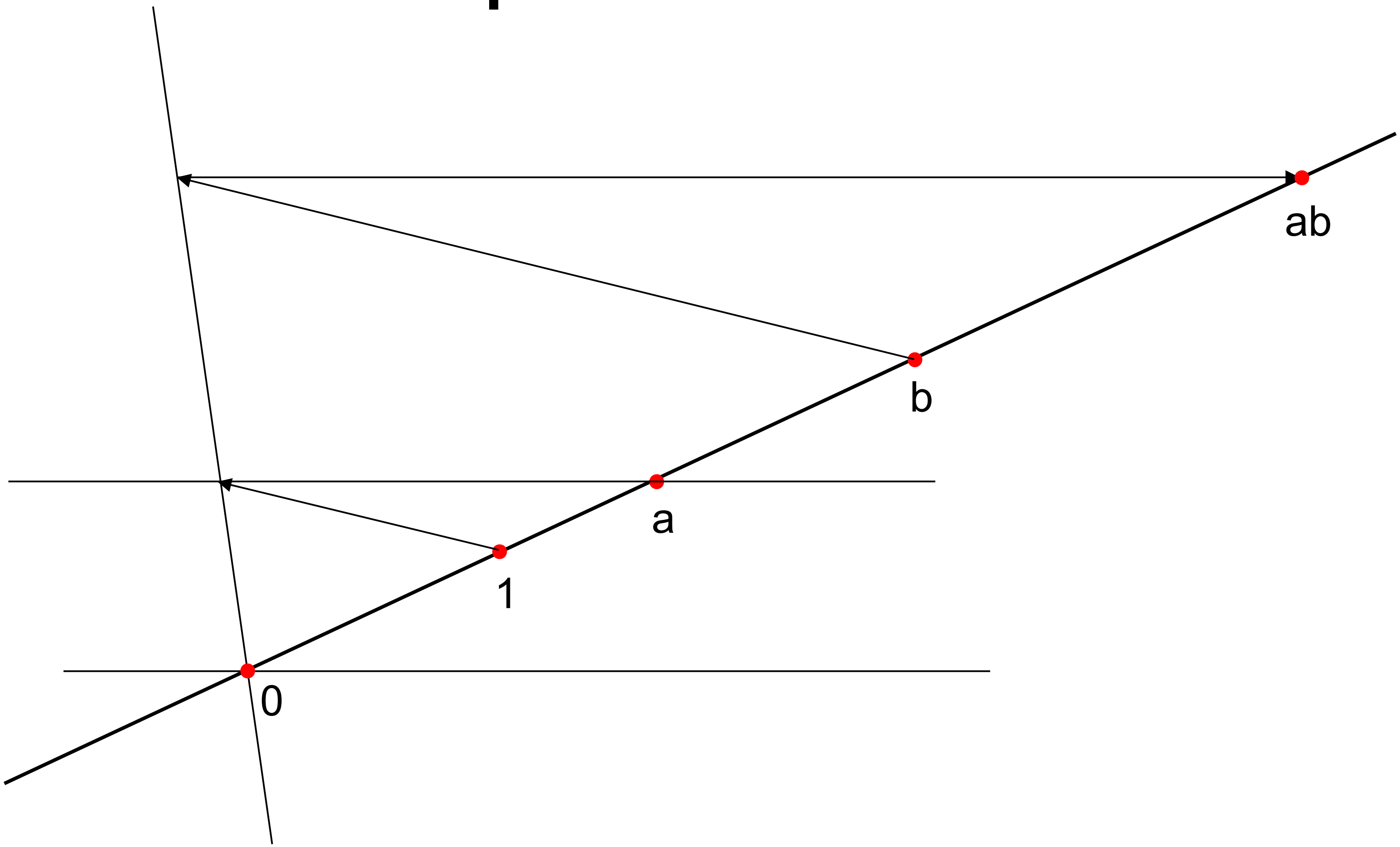


producto



Este producto tiene neutro izquierdo y derecho y el producto de dos elementos distintos de 0 es distinto de 0.

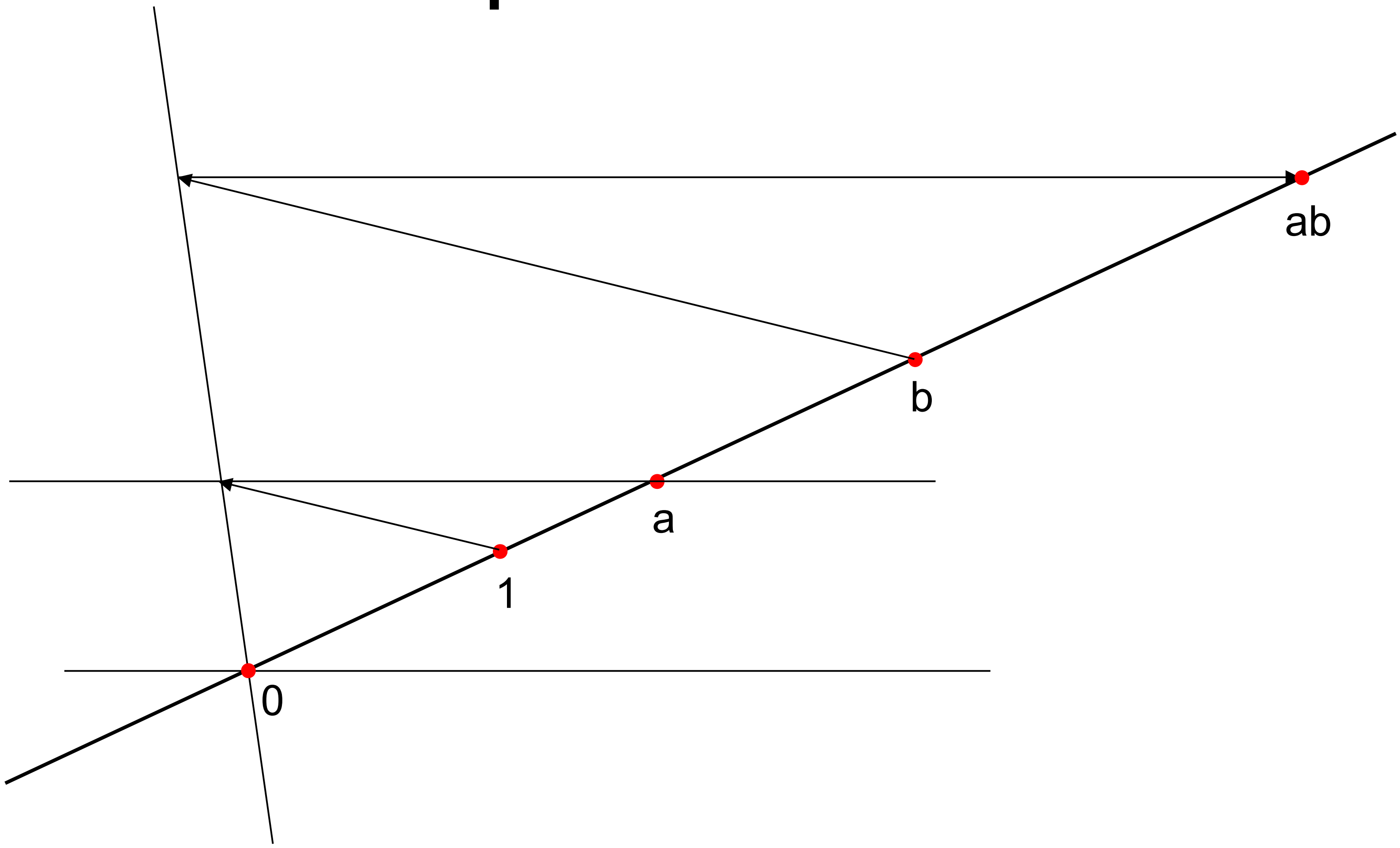
producto



Para definir un grupo, necesitamos que sea asociativo.

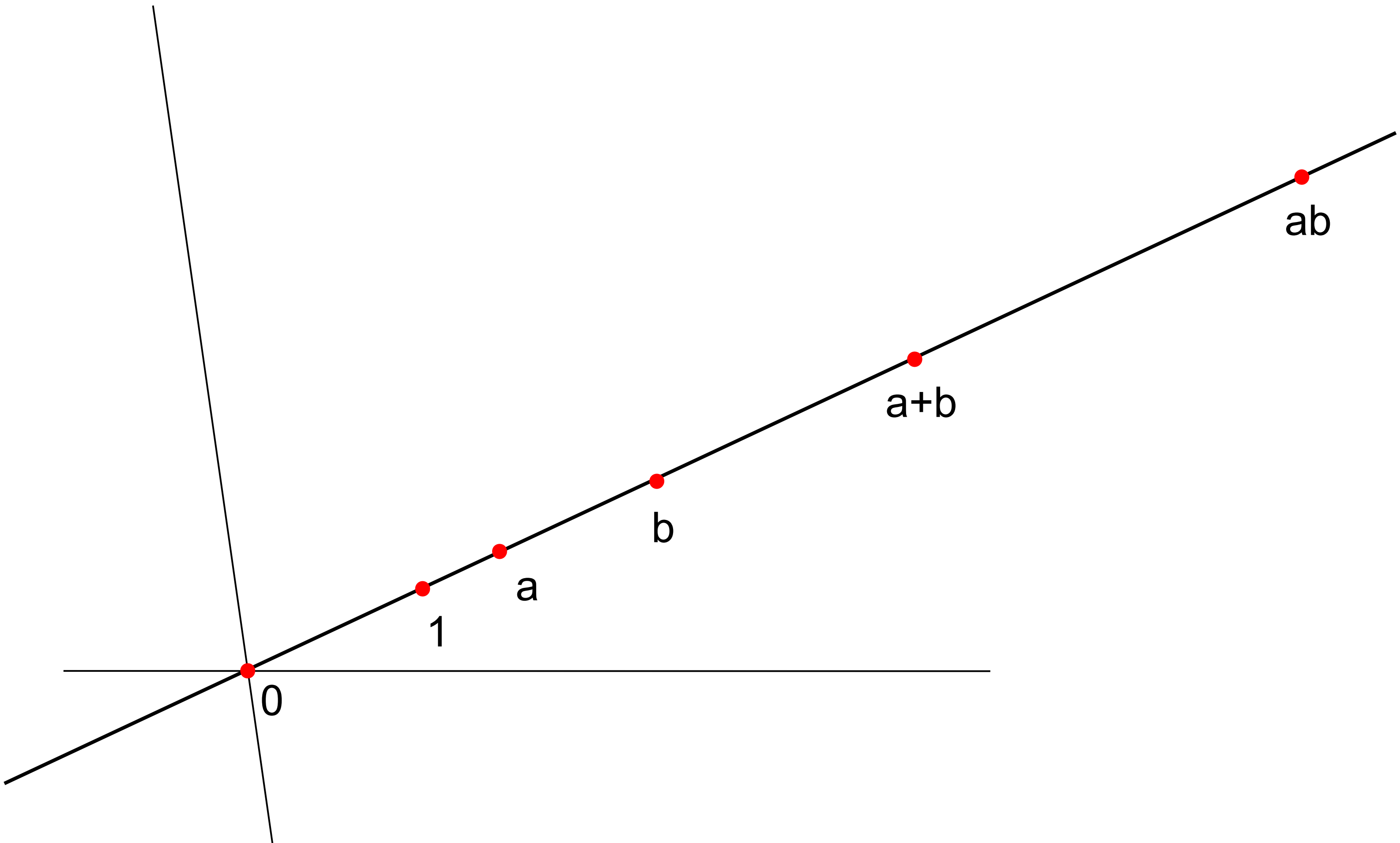
Para definir un anillo, necesitamos además que se distribuya con la suma.

producto



Si vale el teorema de Desargues, este producto es asociativo y no depende de las líneas elegidas

Si vale Desargues, esta suma y producto definen un anillo con división en cada línea afín, y el anillo *no* depende de la línea



Ahora podemos usar el anillo para darle coordenadas al plano afin, y mostrar que las líneas afines tienen ecuaciones lineales